Izvodi iz knjiga

Izvodi iz knjige Metodička zbirka rešenih zadataka iz matematike

4. Naći

$$\lim_{x\to 0+}(\operatorname{tg} x)^{\sin x}$$

Rešenje:

Funkcija čiju graničnu vrednost tražimo je $(\operatorname{tg}x)^{\sin x}$. Ako zamenimo granicu kojoj teži x u samu funkciju dobićemo $(\operatorname{tg}0)^{\sin 0} = 0^0$. Ovo je neodređeni oblik pa je potrebno izvršiti pogodnu transformaciju da bi graničnu vrednost sveli na neki od poznatih oblika. Iz teorije o logaritmima je poznato da se svaki broj a ($a > 0$) može napisati na sledeći način $a = e^{\ln a}$.(Prema definiciji logaritma: **Logaritam nekog broja je broj kojim treba stepenovati datu osnovu da bi se dobio taj broj**.)

Ova definicija važi i ako se broj zameni funkcijom.

$a = (\operatorname{tg}x)^{\sin x}$, $(\operatorname{tg}x)^{\sin x} = e^{\ln(\operatorname{tg}x)^{\sin x}}$. U eksponentu se nalazi logaritam stepena koji se logaritmuje prema pravilu za logaritmovanje stepena ($\ln a^x = x \ln a$) . Ako primenimo ovo pravilo dobićemo $e^{\ln(\operatorname{tg}x)^{\sin x}} = e^{\sin x \ln \operatorname{tg}x}$. Na osnovu ovih transformacija granična vrednost postaje $\lim_{x\to 0+}(\operatorname{tg} x)^{\sin x} =$

$$= \lim_{x\to 0+} e^{\ln(\operatorname{tg} x)^{\sin x}} = \lim_{x\to 0+} e^{\sin x \ln \operatorname{tg} x} \cdot$$

Kako je $\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to a} f(x)}$ to se dobija

Izvodi iz knjiga

$$\lim_{x\to 0+} e^{\sin x \ln(\operatorname{tg} x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} \sin x \ln \operatorname{tg} x} \cdot$$

Označimo eksponent sa A tj.

$$A = \lim_{x\to 0+} \sin x \ln \operatorname{tg} x \cdot$$

Ako zamenimo granicu dobijamo

$$\sin 0 \cdot \ln \operatorname{tg} 0 = 0 \cdot (-\infty) = (-0\cdot\infty).$$

Ovo je neodređeni oblik i potrebno je transformacijom da ga svedemo na neki poznati oblik odnosno tip graničnih vrednosti.

$$\sin x \ln \operatorname{tg} x = \frac{\sin x \ln \operatorname{tg} x}{1} = \frac{\frac{\sin x \ln \operatorname{tg} x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\frac{1}{\sin x}}.$$

Ovim transformacijama granična vrednost postaje

$$A = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\frac{1}{\sin x}}.$$

Ako se zameni granica dobija se

$$\frac{\ln 0}{\frac{1}{\sin 0}} = (-\frac{\infty}{\infty}) \cdot$$

Ovo je neodređeni oblik tipa $\frac{\infty}{\infty}$ pa se može primeniti Lopitalovo pravilo.

$$A = \lim_{x\to 0+} \frac{(\ln \operatorname{tg} x)'}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)'} =$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x)}} =$$

Izvodi iz knjiga

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{\dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{\cos x}} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}} = -\lim_{x \to 0+} \frac{\sin^2 x}{\sin x \cdot \cos^2 x} =$$

$$= -\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = -\frac{\sin 0}{\cos^2 0} = -\frac{0}{1} = 0.$$

I konačno, granična vrednost će biti $\mathbf{e^A = e^0 = 1}$ tj.

$$\lim_{x \to 0+} (\operatorname{tg} x)^{\sin x} = 1.$$